FAPP – Problèmes d'allocation de fréquences avec polarisation.

CHALLENGE ROADEF 2001[1]

Octobre 2000 – Révision 2 du 13/10/00

Thierry DEFAIX – DGA/DCE/ETC5/**CELAR/TCOM** [2]

Résumé :

Les demandes en communication sans cesse croissantes du fait de l'augmentation du nombre des utilisateurs et de l'apparition de nouveaux besoins, combinées au caractère inextensible de la ressource spectrale disponible rendent de plus en plus difficiles la tâche d'allocation de fréquences. Aussi la gestion optimale des fréquences devient un point essentiel pour le déploiement et l'administration des réseaux tant civils que militaires.

Le CELAR en tant que centre technique de la Délégation Générale pour l'Armement (DGA) est chargé dans le cadre de programmes d'armement ou d'études amonts de la réalisation et du suivi d'une partie des travaux visant à optimiser l'utilisation du spectre au sein des forces armées françaises. Dans ce contexte, le sujet proposé concerne l'allocation des fréquences dans les réseaux de télécommunication par voies hertziennes. Ce problème traité dans le projet CALMA (Combinatorial ALgorithms for Military Applications) dans les années 93-95 a été enrichi pour prendre en compte les notions de polarisation et de relâchement contrôlé des contraintes de compatibilité électromagnétique.

[1] URL principale (ROADEF) :

URL secondaire (ENSTA) : http://www.ensta.fr/~diam/roadef2001_fapp

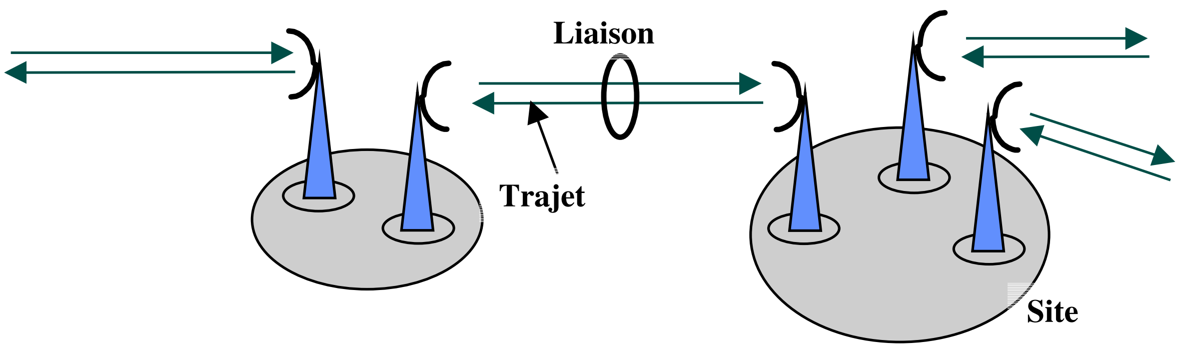
[2] CELAR/TCOM – BP 7419 – 35174 BRUZ Cedex

1 Présentation du problème

1.1 Description 'physique'

Le problème posé est celui de l'allocation des fréquences dans les réseaux de télécommunications par voie hertzienne. Un tel réseau est composé d'un ensemble de **sites** sur lesquels sont implantés les supports de transmission à savoir les antennes raccordées à des émetteurs ou à des récepteurs. Une **liaison** hertzienne établit un lien entre deux sites géographiques. Elle peut être constituée de un ou de plusieurs trajets.

On appelle **trajet** un bond radioélectrique unidirectionnel, établi entre des antennes sur des sites géographiques distincts, à fréquence et polarisation données. On appellera **T** l'ensemble des trajets pour un problème donné.



On définit une **ressource fréquentielle** comme un couple (**fréquence, polarisation**), dont les composants sont associés respectivement à la fréquence porteuse du signal transmis et à la polarisation de l'onde. Cette dernière peut être considérée comme une variable bivalente, par exemple rectiligne verticale ou rectiligne horizontale ; pour simplifier, on ne considèrera que ces deux valeurs possibles.

Pour chaque trajet $i \in T$, on définit un ensemble de ressources qui sont susceptibles de lui être affectées : cet ensemble est appelé **domaine de ressources du trajet**. Il est constitué d'une part du domaine fréquentiel noté $F_{\varphi(i)}$ qui contient l'ensemble des fréquences susceptibles d'être attribuées au trajet *i* et d'autre part d'une information relative aux possibilités de polarisations du trajet : polarisation imposée à l'une des deux valeurs possibles ou polarisation libre notée sous la forme d'un domaine de polarisation $P_{\pi(i)}$. Deux trajets peuvent être amenés à avoir des domaines identiques.

Allouer des fréquences consiste pour l'opérateur à trouver un couple (fréquence, polarisation) pour chaque trajet, parmi un domaine de ressources fréquentielles associé à ce trajet (déterminé par la réglementation, les contraintes matérielles et/ou par des choix de l'allocateur) et satisfaisant des contraintes de compatibilité radioélectrique (CEM). En effet, les fréquences ne peuvent pas être allouées aux différents trajets sans précautions, la co-localisation sur un même site de plusieurs émetteurs et récepteurs imposent des contraintes quant aux ressources affectées si on veut garantir un fonctionnement optimal.

Au-delà des contraintes de domaine déjà citées, plusieurs types de contraintes couplantes sont à prendre en compte :

1. contraintes d'égalité ou d'inégalité de fréquences entre trajets : $f_i = f_j$ ou $f_i \neq f_j$,
2. contraintes d'égalité ou d'inégalité d'un écart de fréquences : $\left|f_i - f_j\right| = \varepsilon_{ij}$ ou $\left|f_i - f_j\right| \neq \varepsilon_{ij}$,
3. contraintes d'égalité ou d'inégalité de polarisation : $p_i = p_j$ ou $p_i \neq p_j$,
4. contraintes d'écart minimal en fréquences : $\left|f_i - f_j\right| \geq \begin{cases} \gamma_{ij} & \text{si } p_i = p_j \\ \delta_{ij} & \text{si } p_i \neq p_j \end{cases}$.

Cette dernière traduit le fait que l'écart en fréquences nécessaire entre deux trajets qui se perturbent dépend des polarisations qui leurs sont respectivement affectées. En règle générale, on aura une contrainte en polarisation croisée plus faible qu'en polarisation identique : $\gamma_{ij} \geq \delta_{ij}$. On peut voir la polarisation comme une solution technique qui permet d'optimiser l'utilisation de la ressource en fréquences.

On définit une **solution réalisable** comme l'allocation d'une ressource à chaque trajet en satisfaisant l'ensemble des contraintes posées.

Malheureusement, nombre de problèmes n'ont pas de solution réalisable. Des domaines de ressources trop restreints ou des exigences trop fortes peuvent souvent conduire à un tel diagnostic. L'allocateur ne pouvant se satisfaire d'un tel constat d'échec doit pouvoir rechercher des solutions « dégradées », en jouant sur une perte de qualité acceptable. Pour cela, on définit deux types de contraintes :

- les contraintes fortes ou impératives : type 1,2 et 3 présentées ci-dessus, ainsi que les contraintes de domaine ne seront pas relâchées ;
- les contraintes CEM (de type 4) sur lesquelles on autorisera un relâchement progressif et contrôlé. Pour cela on introduit la notion de **niveau de repli**. Le niveau de repli 0 correspondra par convention au problème initialement posé (niveau nominal). Le passage du niveau de repli k au niveau de repli (k+1) se traduit par un relâchement de tout ou partie des écarts fréquentiels définissant chaque contrainte :

$$\left|f_i - f_j\right| \geq \begin{cases} \gamma_{ij}^{(0)} \geq \gamma_{ij}^{(1)} \geq \ldots \geq \gamma_{ij}^{(k)} \geq \ldots \geq \gamma_{ij}^{(10)} & \text{si } p_i = p_j \\ \delta_{ij}^{(0)} \geq \delta_{ij}^{(1)} \geq \ldots \geq \delta_{ij}^{(k)} \geq \ldots \geq \delta_{ij}^{(10)} & \text{si } p_i \neq p_j \end{cases}$$

  Le niveau maximal de relâchement est le niveau 10.

On définit alors une **solution réalisable de niveau *k*** comme l'allocation d'une ressource à chaque trajet en satisfaisant l'ensemble des contraintes fortes et de toutes les contraintes de niveau *k*. On dira alors que le problème est ***k*-réalisable.**

En cas d'inexistence de solution réalisable, le nouvel objectif opérationnel devient par ordre de priorité :

1. rechercher *k** le plus petit niveau de relâchement tel qu'il existe une solution *k**-réalisable ;
2. minimiser le nombre de contraintes CEM non satisfaites au niveau *k* - 1* ;
3. minimiser le nombre de contraintes CEM non satisfaites aux niveaux strictement inférieurs à *k* - 1.*

1.2 Formulation mathématique

Soit T, l'ensemble des trajets du problème.

Soient $F_0, F_1, \ldots, F_N$: N domaines fréquentiels associés au problème (en général, N est petit devant |T|).

Soient $P_{-1}=\{-1\}$, $P_1=\{1\}$, $P_0=\{-1,1\}$ les trois domaines de polarisation possibles.

Pour chaque $i \in T$, on doit associer : $\begin{cases} f_i \in F_{\varphi(i)} \\ p_i \in P_{\pi(i)} \end{cases}$

Où φ(i) et π(i) indiquent respectivement le numéro de domaine fréquentiel et de polarisation associés au trajet *i*

Les contraintes décrites dans une matrice M (en général très creuse) sont de type :

$$\begin{cases} \left|f_i - f_j\right| \geq \dfrac{\left|p_i + p_j\right|}{2}\gamma_{ij}^{(k)} + \dfrac{\left|p_i - p_j\right|}{2}\delta_{ij}^{(k)}, k = 0,1,\ldots,10 \\ \left|f_i - f_j\right| = \varepsilon_{ij} \\ \left|f_i - f_j\right| \neq \varepsilon_{ij} \\ f_i = f_j \\ f_i \neq f_j \\ p_i = p_j \\ p_i \neq p_j \end{cases}$$

Soit $\Theta = \left|\left\{(i,j) : \gamma_{ij}^{(0)} + \delta_{ij}^{(0)} > 0\right\}\right|$, le nombre de contraintes CEM (non impératives)

Soit $V^{(k)} = \left\{(i,j) : \left|f_i - f_j\right| < \dfrac{\left|p_i + p_j\right|}{2}\gamma_{ij}^{(k)} + \dfrac{\left|p_i - p_j\right|}{2}\delta_{ij}^{(k)}\right\}$, le nombre de contraintes de niveau k violées.

Par convention $V^{(-1)} = \varnothing$ et tout problème est 11-réalisable.

On cherchera à minimiser la fonction de coût **c(T,F,P,M)** suivante :

$$\boxed{c(T,F,P,M) = \left(10\Theta^2 k + 10\Theta\left|V^{(k-1)}\right| + \left|\bigcup_{i<k-1} V^{(i)}\right|\right)}$$ avec *k* tel que le problème est *k*-réalisable.

<u>Remarque :</u> si une contrainte est violée au niveau m, elle sera violée à tous les niveaux inférieurs à m, elle sera donc comptée (m+1) fois dans la fonction de coût.

2 Formats des fichiers d'échange

Les fichiers d'entrée (<nom>.in) et de sortie (<nom>.out) sont des fichiers ASCII. Chaque fichier contient les données spécifiques nécessaires à l'utilisation du module d'allocation et d'évaluation pour le fichier d'entrée et d'évaluation de la solution pour le fichier de sortie. Chaque donnée est vue comme un enregistrement formaté.

En plus de la description exhaustive des différents champs donnée ci-dessous, on peut définir quelques règles générales :

- les champs numériques sont cadrés à droite,
- les champs alphanumériques sont cadrés à gauche,
- un enregistrement de type 'CEM à polarisations égales' doit toujours être suivi de l'enregistrement de type 'CEM à polarisations différentes' pour un même couple de trajets.

Les différents types d'enregistrement sont les suivants :

- fichier d'entrée :
    - Domaine,
    - Trajet,
    - Contrainte impérative,
    - Contrainte CEM à polarisations égales et croisées ;
- fichier de sortie :
    - Résultat,
    - Allocation.

2.1 Fichier d'entrée : <nom>.in

2.1.1 Généralités

Dans le fichier d'entrée, les enregistrements de type 'Domaine' précèdent les enregistrements de type 'Trajets' qui précèdent les enregistrements de type 'Contraintes' qu'elles soient impératives ou non.

Les champs de type entier sont donnés sur 5 ou 9 caractères et cadrées à droite. Ainsi, le nombre 33 sur 5 caractères apparaîtra dans le fichier sous la forme de trois espaces suivis de deux chiffres 3 : `...33`.

Dans les formats 'C' et les exemples donnés ci-dessous et pour mieux visualiser les formats, les espaces sont remplacés par le caractère '`.`'.

2.1.2 Enregistrement de type 'Domaine' :

TypRec = DM

TypRec			Numéro de domaine (Entier)						Fréquence (Entier)				
D	M		#	#	#	#	#		#	#	#	#	#

Le format C associé est le suivant : "`DM.%5d.%5d\n`"

Exemple :

Pour un domaine : F_0={10,11,12,13, 14,15}, on aura dans le fichier d'entrée les enregistrements suivants :

```
DM.....0....10
DM.....0....11
DM.....0....12
DM.....0....13
DM.....0....14
DM.....0....15
```

2.1.3 Enregistrement de type 'Trajet'

TypRec = TR

TypRec			Numéro de trajet (Entier)						Numéro de domaine fréquentiel (Entier)						Numéro de domaine de polarisation		
T	R		#	#	#	#	#		#	#	#	#	#		#	#	

Le format C associé est le suivant : `"TR.%5d.%5d.%2d\n"`

<u>Rappel :</u> Les trois domaines de polarisations possibles sont : $P_{-1}=\{-1\}$, $P_{1}=\{1\}$, $P_{0}=\{-1,1\}$.

<u>Exemple :</u>

Soit un problème avec les quatre trajets suivants :

Trajet	$\varphi(i)$	$\pi(i)$
1	0	-1
2	0	0
3	14	0
4	5	1

Le fichier <nom>.in associé contiendra les enregistrements suivants :

```
TR.....1.....0.-1
TR.....2.....0..0
TR.....3....14..0
TR.....4.....5..1
```

2.1.4 Enregistrement de type ‘Contrainte impérative’

TypRec = CI

TypRec			Numéro de trajet 1 (Entier)						Numéro de trajet 2 (Entier)						C1		C2		Valeur de l’écart (Entier)				
C	I		#	#	#	#	#		#	#	#	#	#		#		#		#	#	#	#	#

Le format C associé est le suivant : "`CI.%5d.%5d.%c.%c.%5d\n`"

Champ C1 :
- C1 = F si on a une contrainte qui agit sur les fréquences
- C1 = P si on a une contrainte qui agit sur les polarisations

Champ C2 :
- C2 = E pour une contrainte de type égalité
- C2 = I pour une contrainte de type inégalité

Exemples :

$f_{12} = f_{19}$	`CI....12....19.F.E.....0`
$f_{45} \neq f_{184}$,	`CI....45...184.F.I.....0`
$\left\| f_5 - f_{1498} \right\| = 40$	`CI.....5..1498.F.E....40`
$\left\| f_9 - f_{134} \right\| \neq 10$	`CI.....9...134.F.I....10`
$p_6 = p_9$	`CI.....6.....9.P.E.....0`
$p_{892} \neq p_{52}$	`CI...892....52.P.I.....0`

2.1.5 Enregistrement de type ‘Contrainte CEM à polarisations égale’

TypRec = CE

TypRec			Numéro de trajet 1 (Entier)						Numéro de trajet 2 (Entier)						$\gamma_{ij}^{(0)}$ (Entier)						…		$\gamma_{ij}^{(10)}$ (Entier)				
C	E		#	#	#	#	#		#	#	#	#	#		#	#	#	#	#		…		#	#	#	#	#

Le format C associé est le suivant :

```
"CE.%5d.%5d.%5d.%5d.%5d.%5d.%5d.%5d.%5d.%5d.%5d.%5d.%5d\n".
```

Exemples :

La contrainte si $p_{34}=p_{16}$:

$$|f_{34} - f_{16}| \geq 45 \geq 45 \geq 44 \geq 43 \geq 40 \geq 40 \geq 40 \geq 40 \geq 40 \geq 35 \geq 30$$

donnera l’enregistrement (sur une même ligne) :

```
CE....34....16....45....45....44....43....40....40....40....40....40....35....30
```

2.1.6 Enregistrement de type ‘Contrainte CEM à polarisation différentes’

TypRec = CD

TypRec			Numéro de trajet 1 (Entier)						Numéro de trajet 2 (Entier)						$\delta_{ij}^{(0)}$ (Entier)						…		$\delta_{ij}^{(10)}$ (Entier)				
C	D		#	#	#	#	#		#	#	#	#	#		#	#	#	#	#		…		#	#	#	#	#

Le format C associé est le suivant :

```
"CD.%5d.%5d.%5d.%5d.%5d.%5d.%5d.%5d.%5d.%5d.%5d.%5d.%5d\n".
```

Exemples :

La contrainte si $p_{145} \neq p_{84}$:

$$|f_{145} - f_{84}| \geq 203 \geq 200 \geq 200 \geq 150 \geq 150 \geq 125 \geq 125 \geq 100 \geq 99 \geq 95 \geq 90$$

donnera l’enregistrement (sur une même ligne) :

```
CD...145....84...203...200...200...150...150...125...125...100....99....95....90
```

2.2 Fichier de sortie : <nom>.out

2.2.1 Enregistrement de type 'Réponse'

TypRec = RP

TyrRec		**k**				C1		Temps d'obtention de la meilleure valeur de k en secondes						Temps d'obtention de la garantie de l'optimalité de k en secondes				
R				#		#		#	#	#	#	#		#	#	#	#	#

...

$\left\|V^{(k-1)}\right\|$										C2		Temps d'obtention de la meilleure valeur de $\left\|V^{(k-1)}\right\|$ en secondes						Temps d'obtention de la garantie de l'optimalité de $\left\|V^{(k-1)}\right\|$ en secondes				
	#	#	#	#	#	#	#	#		#		#	#	#	#	#		#	#	#	#	#

...

$\left\|\bigcup_{i<k-1} V^{(i)}\right\|$										C3		Temps d'obtention de la meilleure valeur de $\left\|\bigcup_{i<k-1} V^{(i)}\right\|$ en seconde						Temps d'obtention de la garantie de l'optimalité de $\left\|\bigcup_{i<k-1} V^{(i)}\right\|$ en secondes						Temps total Ttot				
		#	#	#	#	#	#	#		#		#	#	#	#	#		#	#	#	#	#		#	#	#	#	#

Le format C associé est le suivant :

```
"RP.%2d.%c.%5d.%5d.%9d.%c.%5d.%5d.%9d.%c.%5d.%5d %5d\n".
```

Champ C1 :
- C1 = 1 si la preuve de l'optimalité de la valeur de k a été obtenue
- C1 = 0 sinon

Champ C2 :
- C2 = 1 si la preuve de l'optimalité de la valeur de $\left|V^{(k-1)}\right|$ a été obtenue
- C2 = 0 sinon

Champ C3 :
- C3 = 1 si la preuve de l'optimalité de la valeur de $\left|\bigcup_{i<k-1} V^{(i)}\right|$ a été obtenue
- C3 = 0 sinon

Remarques:

Les temps d'obtention T1 T2 et T3 sont les temps mis par le module d'optimisation pour obtenir la meilleure valeur de la composante associée.

Ttot indique le temps total de calcul à savoir 3600 secondes en cas d'arrêt au bout d'une heure ou moins si l'optimalité de la solution est obtenue, auquel cas, le temps indiqué donne le temps total mis par le module algorithmique pour obtenir la garantie d'optimalité de la solution.

Une valeur de temps inconnue devra apparaître sous la forme `99999`.

Voir illustrations dans les exemples.

2.2.2 Enregistrement de type 'Allocation'

TypRec = AL

TypRec			Numéro de trajet (Entier)						Fréquence allouée (Entier)						Polar. (Entier)	
A	L		#	#	#	#	#		#	#	#	#	#		#	#

Le format C associé est le suivant : `"AL.%5d.%5d.%2d\n"`

Soit un problème avec les quatre trajets suivants :

Trajet	f_i	p_i
1	10	-1
2	2	1
3	18	1
4	40	1

Le fichier <nom>.out associé contiendra les enregistrements suivants :

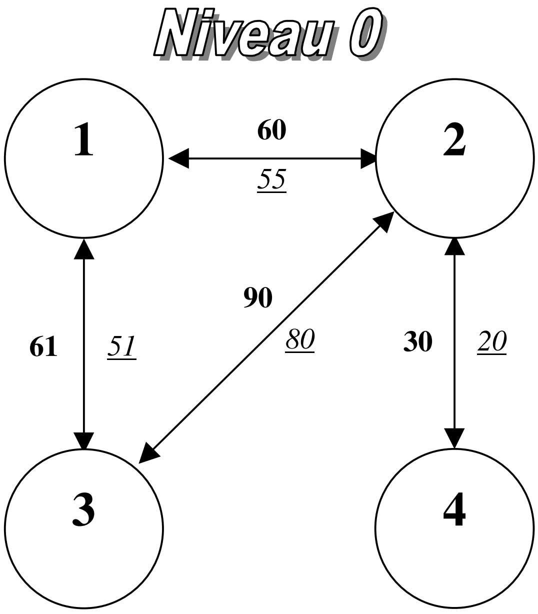
```
AL.....1....10.-1
AL.....2.....2..1
AL.....3....18..1
AL.....4....40..1
```

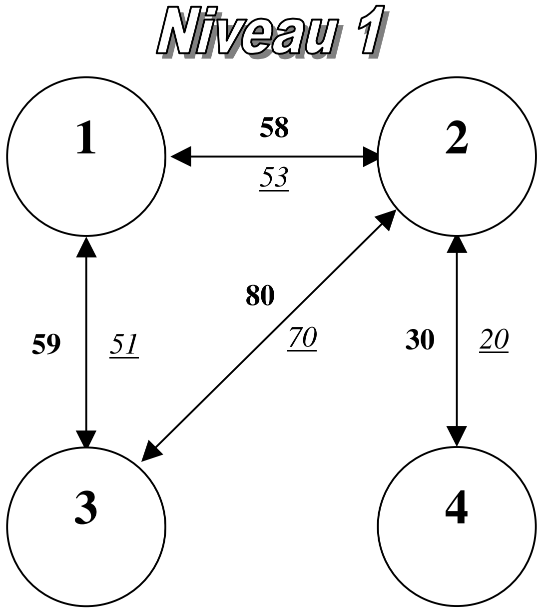
3 Exemples

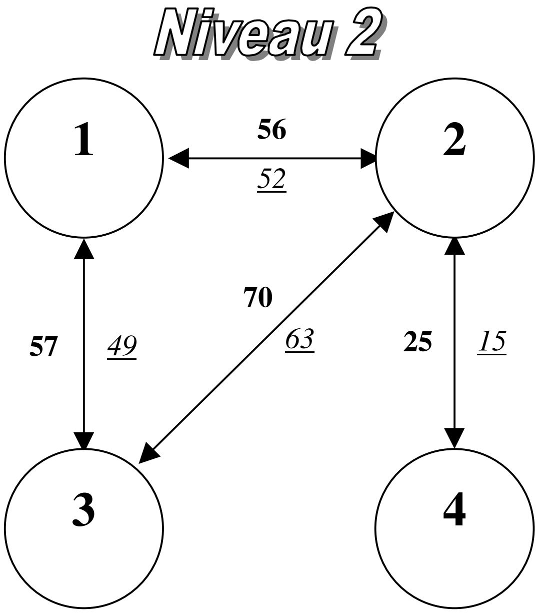
3.1 Exemple 1 - domaine fréquentiel unique et sans contrainte impérative

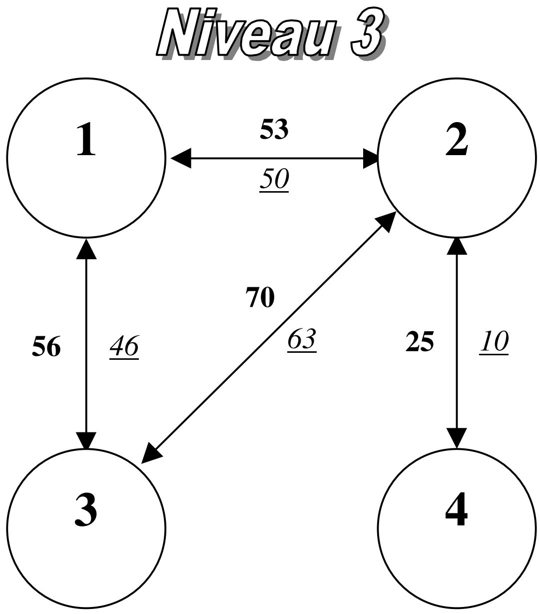
Ce premier exemple comporte quatre trajets numérotés de 1 à 4. Ils partagent tous un même domaine fréquentiel et domaine de polarisation : pour tout i=1,2,3,4, $\varphi(i)=\pi(i)=0$ avec $F_0=\{1,2,\ldots,100\}$.

Les onze illustrations suivantes détaillent les différentes contraintes à chaque niveau de repli. La contrainte CEM à polarisations identiques est indiquée en **gras** alors que la contrainte CEM à polarisations croisées est indiquée en *italique souligné*. Sur ce petit exemple, nous n'avons imposé que des contraintes CEM, aucune contrainte impérative sur les fréquences ou sur les polarisation n'a été définie.

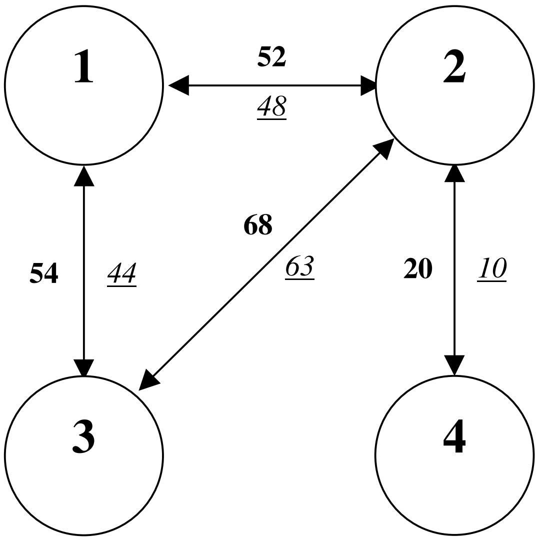




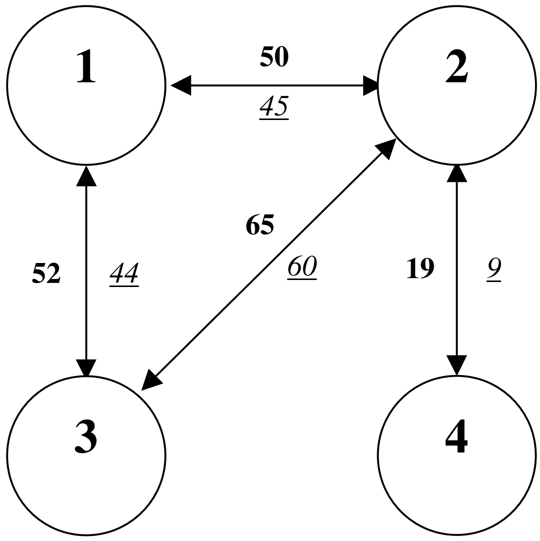




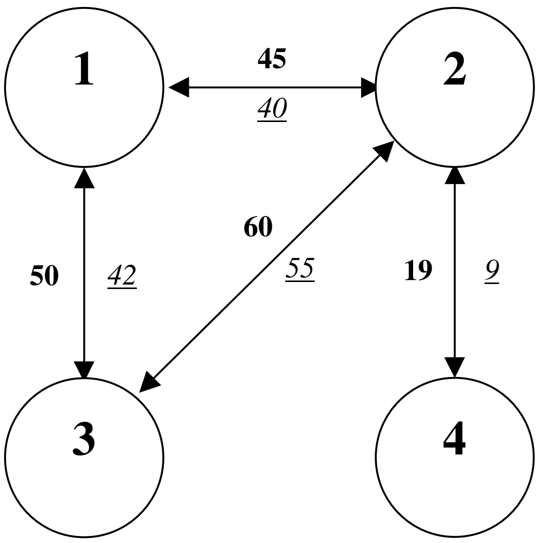
Niveau 4



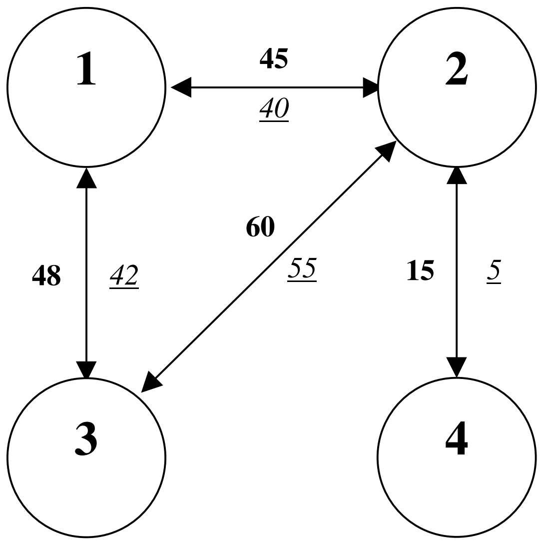
Niveaux 5 et 6



Niveaux 7 à 9



Niveau 10



Le fichier Exemple1.in associé à cet exemple est le suivant :

```
DM.....0.....1
DM.....0.....2
DM.....0.....3
```

On a autant de lignes DM que de valeurs, soit 100 en tout.

```
DM.....0...100
TR.....1.....0..0
TR.....2.....0..0
TR.....3.....0..0
TR.....4.....0..0
CE.....1.....2....60....58....56....53....52....50....50....45....45....45....45
CD.....1.....2....55....53....52....50....48....45....45....40....40....40....40
CE.....1.....3....61....59....57....56....54....52....52....50....50....50....48
CD.....1.....3....51....51....49....46....44....44....44....42....42....42....42
CE.....2.....3....90....80....70....70....68....65....65....60....60....60....60
CD.....2.....3....80....70....63....63....63....60....60....55....55....55....55
CE.....2.....4....30....30....25....25....20....19....19....19....19....19....15
CD.....2.....4....20....20....15....10....10.....9.....9.....9.....9.....9.....5
```

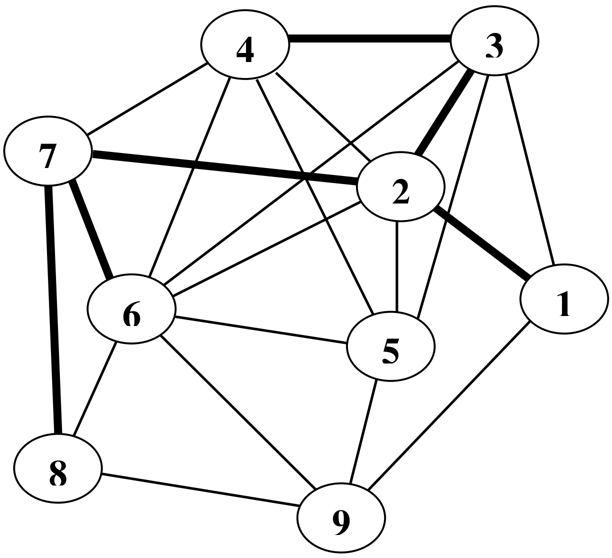
Le fichier Exemple1.out associé à cet exemple pourrait être le suivant :

```
RP..3.1...500...750.........1.1..1800..1800.........4.0..3590.99999..3600
AL.....1....51..1
AL.....2.....1.-1
AL.....3...100.-1
AL.....4....40.-1
```

On a obtenu la première solution 3-réalisable (k=3) au bout de 500 secondes, la preuve de l'optimalité de cette valeur de k a été obtenue au bout de 750 secondes. Parmi les solutions 3-réalisables, on a obtenu une première solution avec une contrainte non satisfaite au niveau 3-1=2 en 1800 secondes et la preuve de l'optimalité de cette valeur a été obtenue simultanément en 1800 secondes. Enfin, une solution ayant 4 contraintes non satisfaites pour les niveaux 0 à 1 (<2) a été fournie en 3590 secondes mais la preuve de son optimalité n'a pas été apportée. Le temps total de calcul a été de 3600 secondes.

3.2 Exemple 2 - complet

On considère un problème avec 9 trajets. La figure suivante représente les contraintes imposées entre les trajets. Un trait épais indique une contrainte forte alors qu'un trait fin indique une contrainte de type CEM.



On dispose de trois domaines fréquentiels :

F_0={0,1,2,3,…,99,100}

F_1={25,26,27,28,29,30,31,32,33,34,35,36,37,38,39,40}

F_2={55,56,57,63,64,65}

Les trajets numérotés de 1 à 9 disposent des ressources suivantes :

Trajet	φ(i)	π(i)
1	1	-1
2	1	0
3	0	0
4	2	1
5	0	0
6	0	0
7	2	0
8	0	0
9	0	0

Les contraintes à prendre en compte sont les suivantes :

1. contraintes impératives :
   - $|f_2 - f_3| = 36$
   - $f_1 = f_2$
   - $f_7 \neq f_8$
   - $p_3 = p_4$
   - $p_2 = p_7$
   - $p_6 \neq p_7$
2. contraintes CEM :
   - $\gamma_{13} = (46,44,42,42,40,40,35,35,35,30,20)$ $\delta_{13} = (39,37,35,35,33,33,28,28,28,23,13)$
   - $\gamma_{19} = (30,29,28,27,26,25,24,23,22,21,20)$ $\delta_{19} = (29,28,27,26,25,24,23,22,21,20,19)$
   - $\gamma_{24} = (33,32,30,30,29,28,27,22,17,12,7)$ $\delta_{24} = (29,28,27,27,27,26,25,20,15,10,5)$
   - $\gamma_{25} = (80,78,76,74,74,72,70,45,40,35,30)$ $\delta_{25} = (75,73,71,69,69,67,65,40,35,30,25)$
   - $\gamma_{26} = (55,53,50,45,40,40,40,35,30,25,20)$ $\delta_{26} = (50,48,45,40,36,36,36,30,25,20,15)$
   - $\gamma_{35} = (20,20,20,20,20,20,20,20,20,20,20)$ $\delta_{35} = (19,19,19,19,19,19,19,19,19,19,19)$
   - $\gamma_{36} = (50,48,46,44,42,40,38,36,34,32,30)$ $\delta_{36} = (50,48,46,44,42,40,38,36,34,32,30)$
   - $\gamma_{45} = (30,27,26,25,22,21,19,16,15,13,10)$ $\delta_{45} = (29,25,25,23,21,19,18,14,14,11,9)$
   - $\gamma_{47} = (15,14,12,9,5,0,0,0,0,0,0)$ $\delta_{47} = (10,9,7,4,0,0,0,0,0,0,0)$
   - $\gamma_{56} = (55,48,45,43,43,41,41,41,40,40,40)$ $\delta_{56} = (50,47,43,42,42,41,40,39,39,39,35)$
   - $\gamma_{59} = (30,30,30,27,27,27,23,23,23,20,20)$ $\delta_{59} = (25,25,25,22,22,22,20,20,20,15,15)$
   - $\gamma_{68} = (50,48,44,42,38,36,32,30,26,24,20)$ $\delta_{68} = (47,45,41,39,35,33,29,27,23,21,17)$
   - $\gamma_{69} = (13,13,13,13,13,13,13,5,5,5,0)$ $\delta_{69} = (10,10,10,10,10,10,10,1,1,1,0)$
   - $\gamma_{89} = (20,19,17,15,14,12,11,9,8,6,5)$ $\delta_{89} = (15,14,12,11,9,8,6,5,3,2,0)$

Le fichier Exemple2.in associé à cet exemple est le suivant :

```
DM.....0.....0
DM.....0.....1
DM.....0.....2
```

On a autant de lignes DM que de valeurs, soit 101 en tout.

```
DM.....0...100
DM.....1....25
DM.....1....26
DM.....1....27
DM.....1....28
DM.....1....29
DM.....1....30
DM.....1....31
DM.....1....32
DM.....1....33
DM.....1....34
DM.....1....35
DM.....1....36
DM.....1....37
DM.....1....38
DM.....1....39
DM.....1....40
DM.....2....55
DM.....2....56
DM.....2....57
DM.....2....63
DM.....2....64
DM.....2....65
TR.....1.....1.-1
TR.....2.....1..0
TR.....3.....0..0
TR.....4.....2..1
TR.....5.....0..0
TR.....6.....0..0
TR.....7.....2..0
TR.....8.....0..0
TR.....9.....0..0
CI.....2.....3.F.E....36
CI.....1.....2.F.E.....0
CI.....7.....8.F.I.....0
CI.....3.....4.P.E.....0
CI.....2.....7.P.E.....0
CI.....6.....7.P.I.....0
CE.....1.....3....46....44....42....42....40....40....35....35....35....30....20
CD.....1.....3....39....37....35....35....33....33....28....28....28....23....13
CE.....1.....9....30....29....28....27....26....25....24....23....22....21....20
CD.....1.....9....29....28....27....26....25....24....23....22....21....20....19
CE.....2.....4....33....32....30....30....29....28....27....22....17....12.....7
CD.....2.....4....29....28....27....27....27....26....25....20....15....10.....5
CE.....2.....5....80....78....76....74....74....72....70....45....40....35....30
CD.....2.....5....75....73....71....69....69....67....65....40....35....30....25
CE.....2.....6....55....53....50....45....40....40....40....35....30....25....20
CD.....2.....6....50....48....45....40....36....36....36....30....25....20....15
CE.....3.....5....20....20....20....20....20....20....20....20....20....20....20
CD.....3.....5....19....19....19....19....19....19....19....19....19....19....19
CE.....3.....6....50....48....46....44....42....40....38....36....34....32....30
CD.....3.....6....50....48....46....44....42....40....38....36....34....32....30
CE.....4.....5....30....27....26....25....22....21....19....16....15....13....10
CD.....4.....5....29....25....25....23....21....19....18....14....14....11.....9
CE.....4.....7....15....14....12.....9.....5.....0.....0.....0.....0.....0.....0
CD.....4.....7....10.....9.....7.....4.....0.....0.....0.....0.....0.....0.....0
```

```
CE.....5.....6....55....48....45....43....43....41....41....41....40....40....40
CD.....5.....6....50....47....43....42....42....41....40....39....39....39....35
CE.....5.....9....30....30....30....27....27....27....23....23....23....20....20
CD.....5.....9....25....25....25....22....22....22....20....20....20....15....15
CE.....6.....8....50....48....44....42....38....36....32....30....26....24....20
CD.....6.....8....47....45....41....39....35....33....29....27....23....21....17
CE.....6.....9....13....13....13....13....13....13....13.....5.....5.....5.....0
CD.....6.....9....10....10....10....10....10....10....10.....1.....1.....1.....0
CE.....8.....9....20....19....17....15....14....12....11.....9.....8.....6.....5
CD.....8.....9....15....14....12....11.....9.....8.....6.....5.....3.....2.....0
```

Le fichier Exemple2.out associé à ce problème pourrait être le suivant :

```
RP..7.1..1200..1559.........1.1..2693..3562........14.0..3598.99999..3600
AL.....1....37.-1
AL.....2....37.-1
AL.....3....73..1
AL.....4....65..1
AL.....5....98..1
AL.....6.....1..1
AL.....7....56.-1
AL.....8....55..1
AL.....9....70.-1
```

Le problème est 7-réalisable. Avec l'allocation fournie, on compte une contrainte non satisfaite au niveau 6. De plus, dans la solution fournie, on dénombre au total quatorze contraintes non satisfaites pour les niveaux 0 à 5 (strictement inférieurs à 6). Cette solution est optimale pour la valeur de k et le nombre de contraintes violées au niveau inférieur, en revanche, elle n'est pas nécessairement optimale pour le dernier critère.